TITLE:

等変写像に関する BORSUK-ULAM 型定理とその逆(特異点論とオーミニマルカテゴリー)

AUTHOR(S):

長崎, 生光

CITATION:

長崎, 生光. 等変写像に関する BORSUK-ULAM 型定理とその逆(特異点論とオーミニマルカテゴリー). 数理解析研究所講究録 2007, 1540: 172-179

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/80648

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 172-179

等変写像に関する BORSUK-ULAM 型定理とその逆

京都府立医科大学大学院医学研究科・長崎　生光（Ikumitsu Nagasaki）
Department of Mathematics, Graduate School of Medical Science
Kyoto Prefectural University of Medicine

1. The Borsuk-Ulam theorem

K. Borsuk により証明された Borsuk-Ulam の定理は次のように述べられる.

Borsuk-Ulam の定理. (BU1): 任意の連続写像 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ に対して, $f(-x) = f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する.

この定理は様々な言い換えが知られているが, 変換群論の観点からは次の二つの言い換え（(BU1) と同値な命題）(BU2), (BU3) が重要である.

変換群論的言い換え. 位数 2 の巡回群 C_2 は球面およびユークリッド空間上に対心的に作用しているとする. このとき,

(BU2): C_2 写像 $f: S^m \to S^n$ が存在するれば $m \le n$ である.

(BU3): C_2 写像 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ が存在すれば $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ である.

(BU1)–(BU3) の一般化は多くの研究者により研究されている. 本論文では (BU2) の一般化に重点を置き, はじめに知られている一般化について紹介したい.

まず, 直接的な一般化として次の結果はよく知られている.

定理 1.1 (mod p version). 素数位数の巡回群 C_p は S^m, S^n 上に自由に作用するとする. C_p 写像 $f: S^m \to S^n$ が存在するならば $m \le n$ である.

この定理は様々な方法で証明されているが, 次の結果からも示される.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 55M20.

This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research for Scientific Research ((C) No.17540075), Japan Society for the Promotion of Science.

定理 1.2. C_p は S^n 上に自由に作用するとする．任意の C_p 写像 $h : S^n \to S^n$ に対して, $\deg h \equiv 1 \mod p$ が成り立つ．特に $\deg h \neq 0$ である．

このように同変写像の写像度は Borsuk-Ulam 型の定理に深く関わり，重要な役割を果たしている．この方向から原 [5] や井上 [6] は Borsuk-Ulam の定理を自由 $O(k)$ または $(C_p)^k$ 作用をもつ Stiefel 多様体の場合に拡張している．

自由作用でない場合には，一般には，Borsuk-Ulam 型定理は成り立たない．例えば，$C_n = \langle\sigma\rangle \subset \mathbb{C}$, $\sigma = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ とし，複素表現 $T_k (= \mathbb{C})$ は $\sigma \cdot z = \sigma^k z$ なる作用で与えられるものとする．このとき，次のような反例が構成できる．

例 1.3. p, q は互いに異なる素数とし，$n = pq$ とおく．任意の整数 $m \geq 1$ に対し，C_{pq} 写像 $f : ST_1^{\oplus m} \to S(T_p \oplus T_q)$ が存在する．

この結果は同変障害理論により証明される．その際，重要になる事実は $\deg h = 0$ となる C_{pq} 写像 $h : S(T_p \oplus T_q) \to S(T_p \oplus T_q)$ の存在性である ([10])．

一方, $G = (C_p)^k$ の作用については自由作用でなくても Borsuk-Ulam 型の定理が成り立つことが知られている．

定理 1.4. $G = (C_p)^k$ は球面上に滑らかで不動点自由に作用しているとする．つまり，G 不動点集合は空であるとする．このとき，G 写像 $f : S^m \to S^n$ が存在するならば $m \leq n$ が成り立つ．

この結果も様々な証明が知られているが，もっと一般的な結果 [2] の Theorem 6.4 の帰結でもある．

以上のことから次の問いは自然なものであるといえよう．

問題. Borsuk-Ulam 型定理が成り立つのはどのような群か？

T. Bartsch はこの問いに次のような形で答えた．

定理 1.5 ([1]).

(1) G は素数べき位数の群とする．このとき，∞ に発散する広義単調増加関数 $\phi_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，$V^G = W^G = \{0\}$ である任意の表現 V, W に対して，G 写像 $SV \to SW$ が存在すれば $\phi_G(\dim V) \leq \dim W$ が成り立つ．

(2) G が素数べき位数でないときは，このような関数 ϕ_G は存在しない．

注意. 定理 1.4 により, $G=(C_p)^k$ のときは, ϕ_G として恒等写像としてとれる. しかし, $G=C_{p^2}$ のときには, ϕ_G は恒等写像としてはとれない. つまり, 弱い形でしか Borsuk-Ulam 型定理は成り立たない([1] 参照).

補足として, 定理 1.5 はホモロジー球面上の半線形作用でも成り立つことを指摘しておく. これは p 群の半線形作用をもつホモロジー球面が線形次元関数をもつという結果 ([4], [3]) からの簡単な帰結である.

半線形作用とは次のように定義される.

定義.

(1) ホモロジー球面 Σ 上の滑らかな G 作用が半線形作用とは, 任意の部分群 H に対して, Σ^H がホモロジー球面または $\emptyset$ のときをいう.

(2) Σ が線形次元関数をもつとは, 表現 V が存在し, $\dim\Sigma^H=\dim SV^H$ $(\forall H)$ が成り立つときをいう.

2. 等変 Borsuk-Ulam 定理

G 空間の間の連続写像 $f:X\to Y$ が G **等変** *(isovariant)* とは, f が G 同変であり, イソトロピー群を保つとき：$G_{f(x)}=G_x$ $(\forall x\in X)$ をいう. A. G. Wasserman は Borsuk-Ulam 型定理の等変版を考察し, 次の結果を示した.

定理 2.1 (等変 Borsuk-Ulam 定理). G はコンパクト可解リー群とする. 表現空間 V,W の間に G 等変写像 $f:V\to W$ が存在するならば

$$\dim V-\dim V^G\le\dim W-\dim W^G$$

が成り立つ.

定義. G が IB **性質**をもつとは, V から W への G 等変写像をもつ表現の任意の組 (V,W) について,

$$\dim V-\dim V^G\le\dim W-\dim W^G$$

が成り立つときをいう.

次の問いは自然なものであろう.

問題. どのコンパクト・リー群が IB 性質をもつか?

定理 2.1 はコンパクト可解リー群は IB 性質をもつことを言っている．[11] において IB 性質をもつ非可解な有限群がいくつか知られている．例えば，交代群 A_i, $i=5,\ldots,11$ は IB 性質をもつ．しかし，完全な解答はまだ知られていない．

一方，弱い形の等変 Borsuk-Ulam 定理であれば完全な解が知られている．

定理 2.2 (等変弱 Borsuk-Ulam 定理 [7])．G は任意のコンパクト・リー群とする．このとき，∞ に発散する広義単調増加関数 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在して，表現 V, W に対して，G 等変写像 $SV\to SW$ が存在するならば

$$\varphi(\dim V-\dim V^G)\leq\dim W-\dim W^G$$

が成り立つ．

これは，Bartsch の結果の等変版であるが，同変版とは状況が異なり，半線形作用の場合には成り立たない．正確に述べれば，G が可解であれば半線形作用でも成り立つが，非可解であれば上のような関数 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は存在しない ([7])．このような反例は線形作用にはなっていないので，等変 Borsuk-Ulam の定理の反例にはなっていないことに注意しておく．

3. 等変 Borsuk-Ulam 定理の逆

この節では，G は有限可解群とする．V，W は G 表現とし，$f:V\to W$ は G 等変写像とする．$H\triangleleft K$ を G の部分群の組とし，作用を H に空間を H 不動点集合上に制限する K/H 等変写像 $f^H:V^H\to W^H$ が得られる．K/H は再び可解となるから定理 2.1 を適用すると，つぎの $(C_{V,W})$ がわかる．

$(C_{V,W})$: $\dim V^H-\dim V^K\leq\dim W^H-\dim W^K$ for any pair $H\triangleleft K\leq G$.

さらに (V,W) はつぎもみたす．

$(I_{V,W})$: $\mathrm{Iso}\,V\subset\mathrm{Iso}\,W$,

ここで $\mathrm{Iso}\,V$ は，V のイソトロピー群全体の集合を表す．

定義． 有限可解群 G が完全 *IB* 性質をもつとは，条件 $(C_{V,W})$, $(I_{V,W})$ をみたす任意の G 表現の組 (V,W) に対して，V から W への G 等変写像が存在するときをいう．

等変 Borsuk-Ulam の定理の逆問題として，次の問題を提起したい．

問題． どの有限可解群が完全 IB 性質をもつか？

注意. Gがべき零ならば，条件$(I_{V,W})$は$(C_{V,W})$から導かれる([9])．したがって，この場合は，$(I_{V,W})$を考慮する必要はない．

この問題に関しては，まだまだ研究の途上ではあるが，少なくとも次のような結果は得られている．

定理 3.1 ([9]). p, q, rは互いに異なる素数とする．次の群は完全IB性質をもつ：

(1) 可換p群
(2) $C_{p^m q^n}$ $(s \geq 1,\ t \geq 1)$,
(3) C_{pqr}.

系 3.2. Gが完全IB性質をもてば，VからWへのG等変写像が存在することと$V \oplus U$から$W \oplus U$へのG等変写像が存在することは同値である．

以下，証明の概略を述べる．

3.1. **証明の概略: 可換p群の場合.** 証明のアイディアは特別な等変写像を組み合わせて目的の等変写像を構成するここことにある．

簡単のため，ここでは複素表現のみを扱い，Gは可換とする．

$C_n = \langle\sigma\rangle$, $\sigma = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$とおく．複素$C_n$表現$T_k\,(= \mathbb{C})$は$\sigma \cdot z = \sigma^k z$で与えられるものとする．$T_k$が忠実であるのは$(k, n) = 1$の場合に限ることに注意せよ．$(i, n) = (j, n) = 1$とする．$ik \equiv 1 \mod n$をみたす自然数$k$をとり，写像$f : T_i \to T_j$を$f(z) = z^{kj}$で定義する．このとき$f$は等変である．表現論より既約$G$表現$V$は忠実な既約$C_n$表現から得られる．，ここで$C_n = G/\ker V$である．したがって次を得る．

補題 3.3. V, Wは同じ核をもつ既約G表現とすると，G等変写像$f : V \to W$が存在する．

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$を$V$の既約分解とする．$\mathcal{K}(V)$は各$U_i$の核すべての集合とする．$V(K) = \oplus_{i:\mathrm{Ker}\, V_i = K} V_i$とおくと$V = \oplus_{K \in \mathcal{K}(V)} V(K)$である．

系 3.4. $\dim V(K) \leq \dim W(K)$ならば等変写像$f : V(K) \to W(K)$が存在する．

可換p群Gの場合，$(C_{V,W})$のもと，各$K \in \mathcal{K}(V) \setminus \{G\}$について，$\dim V(K) \leq \dim W(K)$が成り立つことがわかるので等変写像$f : V \to W$が存在する．

3.2. **証明の概略: $C_{p^sq^t}$ の場合.** この場合, $\dim V(K) \leq \dim W(K)$ は一般には成り立たない. 例えば $G = C_{pq}$, $V = T_1$ and $W = T_p \oplus T_q$ とすると $\dim V(1) = 1 > \dim W(1) = 0$ である. しかし T_1 から $T_p \oplus T_q$ への等変写像は存在する. 実際, $f(z) = (z^p, z^q)$ とすれば f は等変写像である.

ここでは一例として, C_{pq} の場合に証明する. 補題3.3より, $V(C_{pq}) = W(C_{pq}) = 0$ としてよい. また,

$$V = a_1T_1 + a_pT_p + a_qT_q, \quad W = b_1T_1 + b_pT_p + b_qT_q.$$

としてよい. このとき条件 $(C_{V,W})$ から, $a_l \leq b_l$ and $a_1 + a_l \leq b_1 + b_l$, $l = p, q$ となる. $a_l = 0$ としてよいので $V = a_1T_1$ である. もし $a_1 \leq b_1$ ならば等変写像 $f : V = a_1T_1 \to b_1T_1 \subset W$ が存在する.

もし $a_1 > b_1$ ならば等変写像

$$f : (a_1 - b_1)T_1 \to (a_1 - b_1)T_p \oplus (a_1 - b_1)T_q \subset b_pT_p \oplus b_qT_q,$$

したがって

$$\mathrm{id} \oplus f : V = b_1T_1 \oplus (a_1 - b_1)T_1 \to W = b_1T_1 \oplus b_pT_p \oplus b_qT_q$$

が存在する.

一般の場合には, 次のような等変写像（これを基本等変写像と呼ぶ）を用いて証明がなされるが, 詳細は省略する.

補題 3.5. $G = C_n$, $n = p^sq^t$ とする. $(m_1, \ldots, m_{k-1}; n_1, \ldots, n_k)$ は次のような性質をみたす自然数の列とする：n_i/m_i は p べき, n_{i+1}/m_i は q べき, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

このとき, つぎの写像は等変写像である：

$$f : T_{m_1} \oplus \cdots \oplus T_{m_{k-1}} \to T_{n_1} \oplus \cdots \oplus T_{n_k},$$

$$f(z_1, \ldots, z_{k-1}) = (z_1^{n_1/m_1}, z_1^{n_2/m_1} + z_2^{n_2/m_2}, \ldots, z_{k-2}^{n_{k-2}/m_{k-2}} + z_{k-1}^{n_{k-1}/m_{k-1}}, z_{k-1}^{n_k/m_{k-1}}).$$

3.3. **C_{pqr} の場合.** この場合には別の種類の等変写像が必要になる.

命題 3.6. C_{pqr} 等変写像

$$f : T_p \oplus T_q \oplus T_r \to T_1 \oplus T_{pq} \oplus T_{qr} \oplus T_{rp}$$

が存在する.

この写像は基本等変写像を用いて構成はできない．証明は同変障害理論および多重写像度を用いて成される．詳細は [9], [8] を参照のこと．

4. 正２面体群のとき

この節では非可換群の場合で最近わかった結果について報告する．非可換群として正２面体群を取り上げる．完全な結果は得られていないが，次のことが証明できる．

定理 4.1. 正２面体群 D_{p^s} (p :prime) は完全 IB 性質を持つ．

証明の概略を述べるために，はじめに D_n の既約表現を復習しておく．

$$D_n = \langle a, b \,|\, a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

とする．実既約表現は以下のように記述できる．$S_k = \mathbb{C}\,(= \mathbb{R}^2)$, $1 \leq k < n/2$ とする． S_k 上の作用は $a \cdot z = \sigma^k z$, $b \cdot z = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, $\sigma \cdot z = \sigma^k z$ で与えられる．これらの S_k がすべての２次元既約表現を与える． 他の既約表現は１次元であり，n が奇数のときは２つの１次元既約表現 U_0, U_1 がある．ただし U_0 は自明な表現で $U_1\,(= \mathbb{R})$ は $a \cdot x = x$, $b \cdot x = -x$, $x \in \mathbb{R}$ で与えられる表現である．

n が偶数のときは，U_0 and U_1 に加え，さらに２つの１次元表現 U_2, U_3 がある．これらはそれぞれ $a \cdot x = -x$, $b \cdot x = x$ と $a \cdot x = -x$, $b \cdot x = -x$ で作用が与えらる．

$D_{n/2} = \langle a^{n/2}, b \rangle$, $D'_{n/2} = \langle a^{n/2}, ab \rangle$ とおくと

$$\ker S_k = C_{(k,n)},\ \ker U_1 = C_n,\ \ker U_2 = D_{n/2},\ \ker U_3 = D'_{n/2}$$

である．

補題 4.2. $(i, n) = (j, n)$, $n = p^s$, とする．このとき G 等変写像 $S_i \to S_k$ が存在する．

証明. S_i, S_j は $D_n/C_{(k,n)} = D_{\frac{n}{(k,n)}}$ の忠実な既約表現と思えるので，$(i, n) = (j, n) = 1$ としてよい．この場合，$f : S_i \to S_j$, $z \mapsto z^{kj}$ は D_n 等変写像である．ただし， k は $ik \equiv 1 \mod n$ をみたす自然数である． □

可換 p 群のときと同じように, $V(K)$ は核 K をもつ既約部分表現の直和を表す．次のような表現につて証明すれば十分である：

$$V = \oplus_{d|n, d\neq n, n/2} V(C_d) \oplus V(C_n)(\oplus V(D_{n/2}) \oplus V(D'_{n/2})),$$

$$W = \oplus_{d|n,d\neq n,n/2} W(C_d) \oplus W(C_n)(\oplus W(D_{n/2}) \oplus W(D'_{n/2})).$$

このとき，補題 4.2 と次の補題から等変写像 $f : V \to W$ の存在がいえる．

補題 4.3. $G = D_{p^s}$ とする．条件 $(C_{V,W})$ のもとで以下が成り立つ．

- p が奇素数のとき，$\dim V(C_{p^i}) \leq \dim W(C_{p^i})$ for $0 \leq i \leq s$.
- $p = 2$ のとき，$\dim V(C_{2^i}) \leq \dim W(C_{2^i})$ for $0 \leq i \leq s-2$, $i = s$, $\dim V(D_{n/2}) \leq \dim W(D_{n/2})$, $\dim V(D'_{n/2}) \leq \dim W(D'_{n/2})$.

証明. p が奇素数のとき，部分群の組 C_{p^i}, $C_{p^{i+1}}$, $0 \leq i \leq s-1$ をとる．このとき $(C_{V,W})$ により，

$$\dim V^{C_{p^i}} - \dim V^{C_{p^{i+1}}} \leq \dim W^{C_{p^i}} - \dim W^{C_{p^{i+1}}}.$$

が成り立つ．したがって $\dim V(C_{p^i}) \leq \dim W(C_{p^i})$ である．$p = 2$ のときも同様である． □

n が素数べきでないときは補題 4.3 は一般には成り立たない．最後に次の予想をあげておく．

予想. C_n が完全 IB 性質をもてば D_n も完全 IB 性質をもつ．

References

[1] T. Bartsch: *On the existence of Borsuk-Ulam theorems* Topology **31** (1992), 533-543.

[2] M. Clapp and D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, J. Reine Angew. Math. **418** (1991), 1-29.

[3] T. tom Dieck: *Homotopiedarstellungen endlicher Gruppen: Dimensionsfunktionen* Invent. Math. **67** (1982), 231-252.

[4] R. Dotzel and G. C. Hamrick, *p-group actions on homology spheres*, Invent. Math. **62** (1980), 437-442.

[5] Y. Hara: *The degree of equivariant maps*, Topology Appl. **148** (2005), 113-121.

[6] A. Inoue: *Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds* Osaka J. Math. **43** (2006), 183-191.

[7] I. Nagasaki: *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, Arch. Math. **81** (2003), 348-359.

[8] I. Nagasaki: *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743-757.

[9] I. Nagasaki: *The converse of isovariant Borsuk-Ulam results for some abelian groups*, Osaka J. Math. **43** (2006), 689-710.

[10] S. Waner: *A note on the existence of G-maps between spheres* Proc. Am. Math. Soc. **99** (1987), 179-181.

[11] A. G. Wasserman: *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.

E-mail address: nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp